1.1 Opšti zadatak Elektrostatike(opšti metodi rješavanja elektrostatičkih problema)

Krajni cilj u Elektrostatici jeste da se odredi distribucija električnog polja odnosno distribucija potencijala. U tom smislu sve probleme u ovoj oblasti možemo podijeliti na dvije grupe: direktne i indirektne probleme.
Direktni problemi bili bi oni u kojima je zadata raspodjela naelektrisanja bilo u vidu zapreminske gustine naelektrisanja $\rho(x,y,z)$, bilo u obliku površinske gustine naelektrisanja $\eta(x,y,z)$. Kod ove grupe problema na raspolaganju nam stoje sledeće relacije:
1. Integralna forma Gausovog zakona za homogenu sredinu

$$\oint_S \vec{E}d\vec{S} = \frac{Q_{ob}}{\varepsilon} \tag{1}$$

Ovaj oblik, kao što smo vidjeli u Osnovama elektrotehnike, omogućava nam rješavanje veoma malog broja problema i to onih problema koje karakteriše visok stepen simetrije.
2. Diferencijalna forma Gausovog zakona

$$\operatorname{div}\vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon} \tag{2}$$

Međutim, iako odavde, u principu, možemo naći E, to nalaženje je moguće samo u malom broju slučajeva. Naime, u razvijenoj formi ova diferencijalna jednačina glasi

$$\frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} = \frac{\rho}{\varepsilon} \tag{3}$$

I njeno rješavanje nije ni malo jednostavno ukoliko neke od komponenata nijesu jednake nuli!
3. Uvođenjem skalarnog potencijala V kao karakteristike elektrostatičkog polja omogućeno je, u najvećem broju slučajeva, lakše nalaženje raspodjele potencijala V, a odatle i polja $\vec{E}$. Naime, kada se radi o zapreminskoj raspodjeli naelektrisanja u nekom domenu υ, datoj sa $\rho = \rho(x,y,z) = \rho(r')$, dijeleći to naelektrisanje na veliki broj elementarnih tačkastih naelektrisanja, pokazali smo da se potencijal dobija u obliku

$$V(r) = \frac{1}{4\pi\varepsilon}\int_{\upsilon} \frac{\rho(r')}{r'}d\upsilon \tag{4}$$

Odnosno u slučaju površinske raspodjele gustine $\eta = \eta(x,y,z) = \eta(r')$

$$V(r) = \frac{1}{4\pi\varepsilon}\int_{S} \frac{\eta(r')}{r'}dS \tag{5}$$

Dakle, poznavajući raspodjelu naelektrisanja nalazimo potencijal a odatle i polje $\vec{E}$ prema relaciji $\vec{E} = -\operatorname{grad}V$. Međutim, činjenica je, da se vrlo često, iako poznajemo raspodjelu naelektrisanja, gornje relacije ne mogu iskoristiti (bar ne direktno!). ako je u pitanju, na primjer, neko metalno naelektrisano tijelo tada se u relaciju (5), umjesto $\eta(r')$ može staviti $\eta = -\varepsilon(\partial V / \partial n)$ čime nepoznati potencijal figuriše ne samo sa lijeve nego i sa desne strane jednačine (5). Takve jednačine se zovu integralne jednačine (i po pravilu nije ih lako riješiti!)

Indirektni problemi bili bi oni problemi u kojima je zadata distribucija polja $\vec{E}$ (odnosno $\vec{D}$) a traži se gustina naelektrisanja u svakoj tački prostora. Ovi problemi se lako rješavaju kada se zna da je

$$\rho = \operatorname{div} \vec{D} \tag{6}$$

$$\eta = D_n = \varepsilon E_n = -\varepsilon \frac{\partial V}{\partial n} \tag{7}$$

Međutim, naša klasifikacija elektrostatičkih problema na direktne i indirektne imala je više za cilj sistematizaciju problema, u cilju veće preglednosti problema. U praksi, daleko najčešće se pojavljuju ovakvi problemi:
Dat je sistem elektroda (metalnih tijela) koje se nalaze na konstantnom potencijalu V, pa se traži distribucija polja među tim elektrodama. Matematička formulacija ovog problema je veoma prosta. Naime, potencijal zadovoljava Laplasovu (ili Poasonovu) diferencijalnu jednačinu

$$\Delta V = \begin{cases} 0 \\ -\dfrac{\rho}{\varepsilon} \end{cases} \tag{8}$$

(Granični uslovi za ovu klasu problema zadaju se tako što se zadaju potencijali svih elektroda $V_1, V_2, \ldots, V_n$, koji su konstantne veličine.)
Nekada, međutim, umjesto potencijala V_i mogu biti zadana naelektrisanja elektroda $Q_1, Q_2, \ldots, Q_n$. Tada se naelektrisanje na k-tom tijelu može predstaviti u obliku

$$Q_k = \oint_{S_k} \eta \, dS = \varepsilon \oint_{S_k} E_n \, dS = -\varepsilon \oint_{S_k} \frac{\partial V}{\partial n} dS \tag{9}$$

Posmatrajući ovu relaciju možemo postaviti pitanje: Šta znači zadati količinu naelektrisanja? – To znači zadati izvod potencijala po normali $\partial V / \partial n$! Drugim riječima, u Elektrostatici granični uslovi se mogu zadati
-zadavanjem konstantnih potencijala po normali, za svako tijelo
- zadavanjem izvoda potencijala po normali, za svako tijelo.
U matematici je prva vrsta graničnih uslova poznata pod nazivom Dirihleov tip graničnih uslova, dok je druga vrsta graničnih uslova poznata pod imenom Nojmanov tip graničnih uslova.
Valjalo bi sada navesti (bez dokaza) teoremu o jednoznačnosti rješenja Laplasove odnosno Poasonove diferencijalne jednačine:
Jednom sistemu graničnih uslova odgovara jedno rješenje Laplasove diferencijalne jednačine. Ili, zadavanjem graničnih uslova elektrostatički problem je jednoznačno određen (distribucija potencijala je jednoznačno određena).
Rezimirajući naprijed rečeno može se zapaziti da smo osnovni zadatak elektrostatike (problem distribucije potencijala odnosno polja) sveli na čisto matematički problem: problem rješavanja Laplasove odnosno Poasonove diferencijalne jednačine, pri čemu su bili zadati bilo Dirihleovi ili pak Nojmanovi granični uslovi. Međutim, problem je u tome što i pri malo komplikovanijim graničnim uslovima ne možemo tačno riješiti ni tako prostu diferencijalnu jednačinu kakva je Laplasova, jer u matematici ne postoji opšti postupak (algoritam) rješavanja diferencijalnih jednačina. S toga se u mnogim praktičnim slučajevima mora pribjegavati približnom rješavanju Laplasove diferencijalne jednačine.

No, ma kojim putem da rješavamo ovu diferencijalnu jednačinu mi takve postupke možemo nazvati direktnim (jer rješavamo diferencijalnu jednačinu). Međutim, u mnogim praktičnim, a veoma važnim slučajevima (problemima), moguće je elektrostatički problem riješiti na indirektan način, tj ne rješavajući pomenute diferencijalne jednačine, već svodimo taj problem na lakši. To će reći, svedimo taj problem na neki poznati ali prostiji problem (indirektni postupci).

1.1.1 Metod ogledanja (1. metod)

A. Teorema o metalizaciji ekvipotencijalnih površina. Metod ogledanja
Još od ranije nam je poznato da je svaka metalna površina ekvipotencijalna, što će reći da je potencijal const. u bilo kojoj tački te površine a linije polja su normalne na metalnu površ.

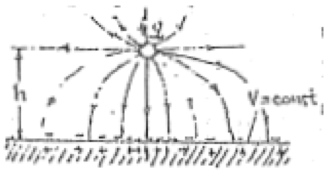
Posmatrajmo sada ma kakvo elektrostatičko polje. Ono je raspoređeno u prostoru, a da bismo ga predstavili u ravni crtanja poslužili smo se datom slikom. Naime, linije polja, iako raspoređene u prostoru, nacrtali smo u ravni, a ekvipotencijalne površine – iako su prostorne površi- predstavili smo linijama normalnim na linije polja. Ako sada bilo koju od ekvipotencijalnih linija, odnosno bolje reći ekvipotencijalnih površina, zamijenimo tankom metalnom površinom (metalnim listom) odnosno ako bilo koju ekvipotencijalnu površinu metalizujemo, da li se šta mijenja u distribuciji polja? Očigledno ne, iz prostog razloga što su granični uslovi ostali isti na toj ekvipotencijalnoj površini zamijenjenoj sa metalnim plaštem! Naime, (debljina plašta ili lista je zanemarljiva što slijedi i iz njegovog imena!) vrijednost potencijala u svim tačkama plašta je const. a linije polja su normalne na površinu plašta! Dakle, u svakoj tački polja i dalje je ostala na snazi Laplasova diferencijalna jednačina

$$\Delta V = 0 \tag{10}$$

Odavde možemo zaključiti: svaku ekvipotencijalnu površinu možemo metalizovati! Razumije se da je pod dejstvom električnog polja došlo, usled indukcije, do razdvajanja naelektrisanja metalnog lista (na „ulaznom“ kraju negativnog – ako je izvor polja bilo pozitivno naelektrisanje, a na „izlaznom“ kraju pozitivno naelektrisanje). No vrlo je bitno primijeniti da ovo indukovano naelektrisanje ne mijenja strukturu prvobitnog polja, tj da linije prvobitnog polja ostaju u istoj gustini, pravcu i smjeru. Dakle, unošenjem metalnog plašta ne remeti se struktura polja!
Distribucija indukovanog naelektrisanja će biti, kao što znamo

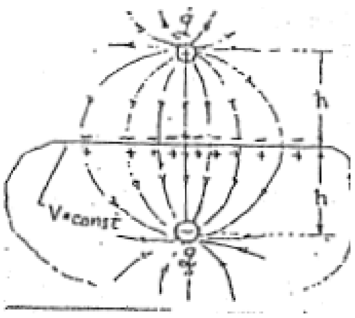
$$\eta = D_n = \varepsilon E_n = -\varepsilon \frac{\partial V}{\partial n} \tag{11}$$

Kao vrlo čest elektrostatički problem jeste slučaj da se jedno ili više naelektrisanih tijela nalazi u blizini provodnih (metalnih) površina, pa treba naći distribuciju polja. Konkretno, posmatrajmo slučaj tačkastog naelektrisanja ($+q$) na odstojanju h od neke horizontalne provodne površine (to je najčešće zemlja). Očigledno je da će prisustvo provodne horizontalne ravni rezultirati tako što ćemo sada umjesto radijalnog polja imati polje kao na slici.



Dakle, distribucija polja će biti nepravilna, tj mnogo komplikovanija nego što je to slučaj od „usamljenog“ naelektrisanja. Polje iznad ravni je nastalo superpozicijom

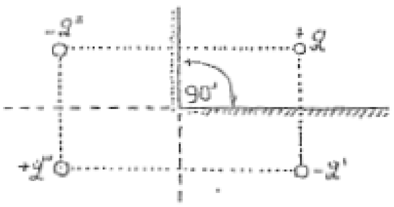
polja primarnog naelektrisanja ($+q$) i polja indukovanog naelektrisanja po površini horizontalne provodne ravni! Prema tome, da bismo izračunali vrijednost polja u proizvoljnoj tački iznad ravni moramo poznavati raspodjelu indukovanog naelektrisanja. S druge strane, da bismo znali raspodjelu indukovanog naelektrisanja morali bi znati distribuciju polja (jer je $\eta = \varepsilon E$). Prosto se stvara utisak kao da smo u nekom začaranom krugu.
Međutim, ovaj veoma složen problem, se prosto rješava primjenom metoda ogledanja.



Naime, u suštini, ništa se neće promijeniti kada provodnu ravan metaliziramo, a zatim uvedemo simetrično naelektrisanje ($-q$)! Sada izračunavanje polja u bilo kojoj tački iznad ravni svodi se na trivijalan problem izračunavanja polja od dva tačkasta naelektrisanja! Da se zaista ništa nije promijenilo u suštini problema treba samo zamisliti horizontalnu provodni ravan kao beskonačno veliku ravan koja se zatvara oko ($-q$) u beskonačnosti (vidi sliku)
i prisjetiti se Maksvelove relacije

$$Q_{ind} = Q_{ob} \tag{12}$$

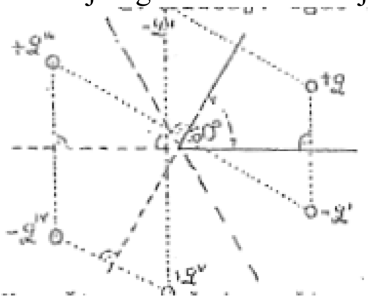
Ako ovu zatvorenu ravan, zajedno sa naelektrisanjem ($-q$) uklonimo, ništa se neće promijeniti u suštini problema, već se ponovo vraćamo na prvobitni problem.
Ovo dalje znači da distribucija polja tačkastog naelektrisanja koje se nalazi iznad ravne provodne površi identična je distribuciji dva tačkasta naelektrisanja, istih ali suprotnih naelektrisanja, smještena simetrično jedno od drugog na dvostrukom rastojanju prvog naelektrisanja od ravni. Kažemo da smo izvršili ogledanje, jer se ($+q$) i ($-q$) odnose kao predmet i lik u ogledalu, pa se i metod naziva metod ogledanja. Dakle, suština metoda ogledanja se sastoji u tome da se indukovano naelektrisanje zamijeni „likom“ primarnog naelektrisanja!
Ako umjesto tačkastog naelektrisanja ($+q$) imamo neko tijelo naelektrisanja ($+Q$) postupak se u biti ne mijenja, s tim što se tijelo prethodno izdijeli, odnosno njegovo naelektrisanje, na konačan broj tačkastih naelektrisanja ($+q$), pa zatim za svako takvo naelektrisanje nađemo „lik“ ($-q$) postavljen u odnosu na simetralnu ravan.
Problem postaje složeniji ako umjesto jedne imamo dvije ravni. Pri tome je bitno koliki je ugao između ravni! To se najlakše shvata na konkretnim primjerima.
1. Slučaj: Ugao između ravni $\alpha = 90^\circ$.



Kao što se sa slike vidi, ukupan broj tačkastih naelektrisanja je 4. ovaj broj se može dobiti i ovakvom diobom:

$$360^\circ : 90^\circ = 4 \tag{13}$$

2. Slučaj: Ugao između ravni je $\alpha = 60°$.



Slika pokazuje, kada se precizno crta, da je ukupan broj tačkastih naelektrisanja 6. ovaj broj se može dobiti kao

$$360° : 60° = 6 \tag{14}$$

Sličnim postupkom dobili bi da je u slučaju $\alpha = 30°$ broj tačkastih naelektrisanja

$$360° : 30° = 12 \tag{15}$$

Itd.
U opštem slučaju važi relacija

$$\alpha = \frac{2\pi}{n} = \frac{360°}{n} \tag{16}$$

Pri čemu n mora biti cio broj.

1.2 B. Kapacitivnost

I. Pojam kapacitivnosti. Jedno od važnih svojstava elektrostatičkih sistema jeste svojstvo kapacitivnosti. Ono se izražava preko parametara koji se zove kapacitet. Nalaženje ovog parametra spada u važan zadatak Elektrostatike. Na značaj nalaženja ovog parametra ukazaćemo na kraju.
Do pojma kapacitivnosti dolazimo razmatrajući izraz za potencijal tačkastog naelektrisanja. Naime, kazali smo da je potencijal tačkastog naelektrisanja u nekoj potencijalnoj tački (na odstojanju r od tog naelektrisanja) dat izrazom

$$V = \frac{Q}{4\pi\varepsilon r} \tag{17}$$

Posmatrajući ovaj izraz uočava se jedna prosta ali veoma važna činjenica: na nekom mjestu (tj za $r = const$) potencijal je direktno srazmjeran naelektrisanju koje ga stvara! Povećanjem Q povećaće se i V i obrnuto! Drugim riječima, između veličina V i Q postoji linearan odnos! U matematičkom obliku ova zavisnost je data u formi

$$V = const \cdot Q \tag{18}$$

Gdje veličina $const$ predstavlja konstantu proporcionalnosti. (u našem slučaju ona iznosi $1/4\pi\varepsilon r$.)
Proširimo sada naše razmatranje na naelektrisano tijelo, tj na usamljeno provodno (metalno) naelektrisano tijelo. Ma kako da je raspoređeno naelektrisanje na ovom tijelu možemo ga izdijeliti na konačan broj praktično tačkastih naelektrisanja. Pa se sada potencijal, u ma kojoj tački prostora oko ovog tijela, može uzeti kao suma potencijala

svih tačkastih naelektrisanja. Kako je potencijal od samo jednog takvog tačkastog naelektrisanja linearan sa tim tačkastim naelektrisanjem, to superponirajući potencijale od svakog elementa jednostavno zaključujemo da će i ukupan potencijal u posmatrano tački prostora biti srazmjeran sa ukupnom količinom naelektrisanja na tom tijelu!
Od samo jednog elementa naelektrisanja je

$$V_i = (const)_i Q_i \text{ , ili} \tag{19}$$

$$Q_i = \frac{1}{(\cos nt)_i} V_i = C_i V_i \tag{20}$$

Prva, odnosno druga relacija važe za svaku tačku u okolini naelektrisanog tijela, pa prema tome, i za tačke na samom tijelu. No, za ove tačke potencijal je isti, tj

$$V_i = V \text{ , te je} \tag{21}$$

$$Q_i = C_i V \text{ , a odavde} \tag{22}$$

$$Q = \sum_1^n Q_i = V \sum_1^n C_i = V \cdot C \tag{23}$$

Ova relacija važi i za razliku potencijala i to onu koja postoji između tijela i referentne tačke ($V_r = 0$), tj

$$Q = CV = C(V - V_r) \tag{24}$$

Kako je, po definiciji,

$$V - V_r = U \tag{25}$$

To se za naelektrisano metalno tijelo može napisati sledeća veza između njegovog naelektrisanja Q i njegovog napona U .

$$Q = C \cdot U \tag{26}$$

Koeficijent srazmjernosti C zove se <u>kapacitet</u> toga tijela. Iz izraza za potencijal tačkastog naelektrisanja, a otuda i iz izraza za potencijal naelektrisanog tijela, lako se može zaključiti da kapacitivnost zavisi od dielektričnih svojstava sredine (ε) kao i od geometrije sistema (oblika i dimenzija tijela i njihovog uzajamnog rastojanja).
Važno je uočiti da se kapacitivnost uvijek definiše, slično potencijalu, u odnosu na neko mjesto, tj u odnosu na referentnu tačku!
Značaj poznavanja kapaciteta nekog tijela (odnosno sistema) sastoji se u tome što znajući kapacitet C možemo neposredno odrediti koliko se naelektrisanje Q nalazu na njemu, pri ma kojoj zadanoj vrijednosti napona!
Vrlo veliki praktični značaj ima sistem od dva naelektrisana metalna tijela (elektrode) sa jednakim ali suprotnim količinama naelektrisanja. Ovakav sistem poznat je pod imenom kondenzator. Napon među tijelima je zadat i iznosi U . Nije teško pokazati da i ovdje važi opšta relacija $Q = CU$. Naime, potencijal bilo koje tačke u prostoru oko ovih tijela biće

$$V_1 = (const)_1 Q_1 \tag{27}$$

$$V_2 = (const)_2 Q_2 \tag{28}$$

Kako je $|Q_1| = |Q_2|$, i pri tome $Q_1 = -Q_2 = -Q$, to će sada potencijali biti

$$V_1 = +(const)_1 Q \quad (29)$$

$$V_2 = -(const)_2 Q \quad (30)$$

Ukupni potencijal uočene tačke u sistemu će biti:

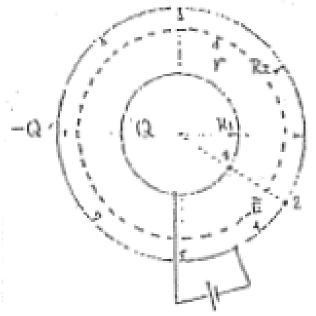
$$V = V_1 + V_2 \quad (31)$$

S obzirom na predznak potencijala, njihov zbir je u stvar razlika tih istih potencijala, a to znači napon U, te je

$$U = \left[(const)_1 - (const)_2\right]Q = (const)Q \text{ , odnosno} \quad (32)$$

$$Q = CU \quad (33)$$

gdje je U napon između tijela, a Q naelektrisanje jednog od njih.
Jedan od vrlo važnih zadataka Elektrostatike jeste određivanje kapaciteta pojedinih elektrostatičkih sistema.
Primjer. Izračunati kapacitet sfernog kondenzatora



Primjenjujući Gausovu teoremu

$$\oint_S \vec{E}d\vec{S} = \frac{Q_{ob}}{\varepsilon} \text{ , a odavde} \quad (34)$$

$$E = \frac{Q}{4\pi\varepsilon r^2} \text{ , a zatim} \quad (35)$$

$$U = \int_1^2 \vec{E}d\vec{l} = \int_1^2 Edr = \frac{Q}{4\pi\varepsilon}\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon}\frac{R_2 - R_1}{R_1 R_2} \quad (36)$$

$$\frac{Q}{U} = C = 4\pi\varepsilon\frac{R_1 R_2}{R_2 - R_1} \quad (37)$$

U slučaju usamljene sfere ($R_2 \to \infty$):

$$C = 4\pi\varepsilon \cdot R_1 \quad (38)$$

1.3 C. Kapacitivnost u sistemu provodnih tijela

I. posmatrajmo sistem proizvoljnog ali konačnog broja naelektrisanih provodnih (metalnih) tijela, međusobno raspoređenih na relativno bliskom rastojanju (tako da postoji međusoban elektrostatički uticaj. Ovaj slučaj je dosta čest u praksi.) Razumije se da pojam kapacitivnosti ne možemo uvesti onako prosto kao za slučaj dva tijela (jednakih ali suprotnih naelektrisanja, jer su u ovom sistemu na svim tijelima različita naelektrisanja u opštem slučaju!) Međutim, pouzdano možemo reći da i dalje važe sledeće dvije činjenice:

- prvo – linearna zavisnost između svakog naelektrisanja i potencijala koje to naelektrisanje stvara, i
- drugo – potencijal ma kojeg tijela potiče, ne samo od naelektrisanja tog tijela, nego i od naelektrisanja svih ostalih tijela. (pri tome, taj udio potencijala svakog drugog tijela srazmjeran je sa naelektrisanjem tog tijela).

Neka se u posmatranom sistemu nalazi n tijela. Koliki će biti potencijal prvog (1) tijela? Shodno prethodno rečenom, potencijal tijela (1) biće najprije stvoren sopstvenim naelektrisanjem Q_1, pa je $V_1^{(1)} = A_{11}Q_1$. A zatim, doprinos drugog tijela (2) potencijalu prvog tijela (1) biće: $V_1^{(2)} = A_{12}Q_2$; doprinos trećeg tijela (3) potencijalu prvog tijela (1) biće: $V_1^{(3)} = A_{13}Q_3$, itd. Dakle, u konačnoj sumi dobijamo da je potencijal prvog tijela

$$V_1 = V_1^{(1)} + V_1^{(2)} + \ldots + V_1^{(k)} + \ldots + V_1^{(p)} + \ldots + V_1^{(n)} \tag{39}$$

Za dati sistem od n naelektrisanih tijela možemo pisati

$$\left.\begin{array}{l} V_1 = A_{11}Q_1 + A_{12}Q_2 + \ldots + A_{1k}Q_k + \ldots + A_{1p}Q_p + \ldots + A_{1n}Q_n \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ V_k = A_{k1}Q_1 + A_{k2}Q_2 + \ldots + A_{kk}Q_k + \ldots + A_{kp}Q_p + \ldots + A_{kn}Q_n \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ V_p = A_{p1}Q_1 + A_{p2}Q_2 + \ldots + A_{pk}Q_k + \ldots + A_{pp}Q_p + \ldots + A_{pn}Q_n \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ V_n = A_{n1}Q_1 + A_{n2}Q_2 + \ldots + A_{nk}Q_k + \ldots + A_{np}Q_p + \ldots + A_{nn}Q_n \end{array}\right\} \tag{40}$$

Ovako uvedeni koeficijenti srazmjernosti „A“ zovu se, prema Maksvelu – <u>potencijalni koeficijenti</u> tijela. Oni zavise kako od sredine tako i od uzajamnog odnosa i oblika tijela. Pri tome, koeficijenti A_{kk} se zovu <u>sopstveni</u> potencijalni koeficijenti, a koeficijenti „A_{kp}“ <u>međusobni</u> potencijalni koeficijenti.

Šta koeficijenti „A“ fizički znače?

Kada bi svako tijelo u sistemu bilo nenaelektrisano osim „k-tog“, tj kada bi bilo $Q_i = 0$ (za $\forall i \neq k$), a samo $Q_k \neq 0$, tada bi bilo

$$A_{kk} = \frac{V_k}{Q_k} \tag{41}$$

Dakle, <u>sopstveni</u> potencijalni koeficijent predstavlja odnos potencijala tijela i njegovog naelektrisanja pod uslovom da su sva ostala tijela nenaelektrisana!

Kada bi, sada, svako tijelo u sistemu bilo nenaelektrisano sem p-tog tijela, tj kada bi bilo $Q_i = 0$ za $\forall i \neq p$, a $Q_p \neq 0$, bilo bi

$$A_{kp} = \frac{V_k}{Q_p} \tag{42}$$

Ovaj koeficijent možemo definisati i pri prvom uslovu iz p-te jednačine-

Dakle, međusobni potencijalni koeficijent je odnos potencijala tijela – k i naelektrisanja tijela – p, uz uslov da su sva druga tijela, izuzev tijela- p, nenaelektrisana!

U slučaju samo k i p tijela razlikovaćemo:

1. $Q_k = 0, \quad Q_p = Q$, pa je

$$V_k = A_{kp}Q_p = A_{kp}Q \tag{43}$$

2. Obrnuto, za $Q_k = Q, \quad Q_p = 0$, te je

$$V_p = A_{pk}Q_k = A_{pk}Q \tag{44}$$

Postoji u elektromagnetici teorema uzajamnosti, koja važi za jednu od vrlo važnih teorema, a koja kaže: ako je $Q_p = Q_k$ slijedi da je $V_p = V_k$, što opet ima za posledicu da je

$$A_{kp} = A_{pk} \tag{45}$$

II. Ponovo se vratimo na sistem od n jednačina označen sa (40). Ovaj sistem je nastao, kao što smo vidjeli, pod pretpostavkom da su naelektrisanja Q_i $(i = 1,2,...,k,...,p,...n)$ poznata. Međutim, moguće je postaviti i obrnuti problem: za poznate potencijale tijela iz posmatranog sistema V_i naći količine naelektrisanja Q_i na tim tijelima. Ako sistem rješavamo pomoću determinanti dobićemo da je, za Q_1, na primjer,

$$Q_1 = \frac{\begin{vmatrix} V_1 A_{12} \ldots A_{1k} \ldots A_{1p} \ldots A_{1n} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ V_k A_{k2} \ldots A_{kk} \ldots A_{kp} \ldots A_{kn} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ V_p A_{p2} \ldots A_{pk} \ldots A_{pp} \ldots A_{pn} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ V_n A_{n2} \ldots A_{nk} \ldots A_{np} \ldots A_{nn} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} A_{11} A_{12} \ldots A_{1k} \ldots A_{1p} \ldots A_{1n} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ A_{k1} A_{k2} \ldots A_{kk} \ldots A_{kp} \ldots A_{kn} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ A_{p1} A_{p2} \ldots A_{pk} \ldots A_{pp} \ldots A_{pn} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ A_{n1} A_{n2} \ldots A_{nk} \ldots A_{np} \ldots A_{nn} \end{vmatrix}} \tag{46}$$

$$Q_1 = V_1 \frac{D_{11}}{D} + V_2 \frac{D_{12}}{D} + \ldots + V_k \frac{D_{1k}}{D} + \ldots + V_p \frac{D_{1p}}{D} + \ldots + V_n \frac{D_{1n}}{D} \tag{47}$$

$$Q_1 = B_{11}V_1 + B_{12}V_2 + \ldots + B_{1k}V_k + \ldots + B_{1p}V_p + \ldots + B_{1n}V_n \tag{48}$$

Na sličan način se mogu izraziti i ostala nepoznata naelektrisanja datog sistema od n tijela, što znači da sistem (40), izražen preko koeficijenata „B“, poprimi ovakav oblik:

$$\left.\begin{array}{l} Q_1 = B_{11}V_1 + B_{12}V_2 + \ldots + B_{1k}V_k + \ldots + B_{1p}V_p + \ldots + B_{1n}V_n \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ Q_k = B_{k1}V_1 + B_{k2}V_2 + \ldots + B_{kk}V_k + \ldots + B_{kp}V_p + \ldots + B_{kn}V_n \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ Q_p = B_{p1}V_1 + B_{p2}V_2 + \ldots + B_{pk}V_k + \ldots + B_{pp}V_p + \ldots + B_{pn}V_n \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ Q_n = B_{n1}V_1 + B_{n2}V_2 + \ldots + B_{nk}V_k + \ldots + B_{np}V_p + \ldots + B_{nn}V_n \end{array}\right\} \tag{49}$$

Novouvedeni koeficijenti „B" nazivaju se koeficijenti elektrostatičke indukcije, pri čemu, slično kao i kod „A" koeficijenata, razlikujemo sopstvene (B_{kk}) i međusobne koeficijente elektrostatičke indukcije (B_{kp}).
Kakvo je značenje „B" koeficijenata?
Ako je u posmatranom sistemu od n naelektrisanih tijela $V_i = 0$ za svako $i \neq k$, onda iz k-te jednačine slijedi:

$$B_{kk} = \frac{Q_k}{V_k} \tag{50}$$

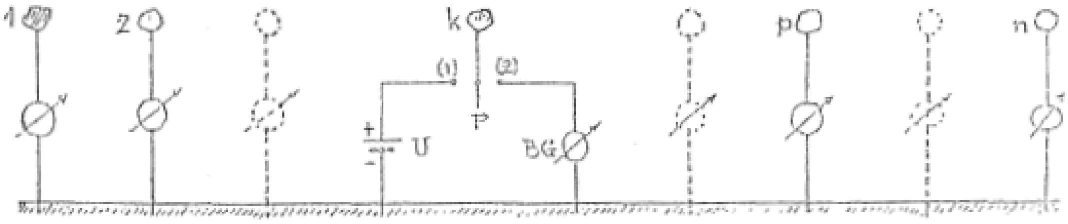
Dakle, sopstveni koeficijent elektrostatičke indukcije predstavlja odnos sopstvenog naelektrisanja i sopstvenog potencijala. Znači, ova koeficijent ima prirodu kapacitivnosti i on je uvijek pozitivan ($B_{kk} > 0$). (Naime, ako je $Q_k > 0$ tada mora biti i $V_k > 0$, i obrnuto!)
Ako, sada, gornji uslov ($V_i = 0$, $\forall i \neq k$) unesemo u p-tu jednačinu sistema (49) biće:

$$B_{pk} = \frac{Q_p}{V_k} \tag{51}$$

Dakle, međusobni koeficijent elektrostatičke indukcije predstavlja odnos naelektrisanja tijela p i potencijala tijela k, pod uslovom da su sva ostala tijela uzemljena ($V_i = 0$, $\forall i \neq k$). Nije teško zaključiti da su ovi koeficijenti **uvijek negativni**, tj $B_{pk} < 0$ uvijek! (Naime, ako je $V_k > 0$ tada je $Q_p < 0$ jer je indukovano, i obrnuto!)
I ovdje važi, kao i kod „A" koeficijenata, da je

$$B_{kp} = B_{pk} \tag{52}$$

Što je direktna posledica važenja teoreme reciprociteta za „A" koeficijente, odnosno što je posledica simetričnosti determinante sistema.
Ako su tijela u posmatranom sistemu sasvim proizvoljnog oblika i ako su u blizini zemlje, onda je računanje ovih koeficijenata praktično nemoguće. U tom slučaju se vrši mjerenje ovih koeficijenata na sledeći način:
Mjerenje „B" koeficijenata sprovodimo prema datoj šemi.



Naime, sva tijela datog sistema, sem k-tog, „uzemljimo" preko balističkih galvanometara $(BG)_i$. (To su vrlo osjetljivi instrumenti za registrovanje i najmanjih količina naelektrisanja). Tijelo k, preko preklopnika P možemo priključiti na izvor poznatog napona odnosno na balistički galvanometar. Izrazi za koeficijente su:

$$B_{kk} = \frac{Q_k}{V_k} \tag{53}$$

I

$$B_{kp} = \frac{Q_p}{V_k} \tag{54}$$

Znajući napon izvora istovremeno znamo imenioce svih ovih koeficijenata.
Prebacivanjem preklopnika u položaj (1) tijelo *k* se naelektriše (i to pozitivno prema ovoj šemi). Naelektrisanje Q_k indukovaće u svim ostalim tijelima neko naelektrisanje, koje se lako može očitati sa BG-a. Time već imamo podatke za izračunavanje uzajamnih koeficijenata „B“. Još je preostalo izračunavanje koeficijenata B_{kk} (sopstvenog). U tom cilju prebacimo preklopnik u položaj (2) čime dobijamo Q_k. Ovim podatkom i sopstveni koeficijent B_{kk} je određen.
III. Još nijesmo uveli pojam kapacitivnosti kod posmatranog sistema. Količina naelektrisanja na tijelu 1 (Q_1) se može smatrati kao posledica konačnih razlika potencijala toga tijela kako prema referentnom mjestu tako i prema svakom drugom tijelu posmatranog sistema. Ideju za ovo nalazimo, prije svega, u sistemu od dva tijela naelektrisana istim ali suprotnim količinama elektriciteta (kondenzator, gdje smo imali da je $Q = CU$, pri čemu je U potencijalna razlika ili napon <u>među tijelima</u>!)
Prema tome, količina (ukupna) elektriciteta na prvom tijelu (Q_1) nastaje kao posledica:
-prvo, potencijala ovog tijela u odnosu na referentno mjesto $Q_1^{(1)}$, i
-drugo, potencijala ovog tijela u odnosu na potencijal drugog po redu tijela u sistemu $Q_1^{(2)}$,
-treće, potencijala ovog tijela u odnosu na treće po redu tijelo iz sistema $Q_1^{(3)}$, itd.
Dakle, u konačnom bilansu za prvo tijelo dobijamo:

$$Q_1 = Q_1^{(1)} + Q_1^{(2)} + \ldots + Q_1^{(k)} + \ldots Q_1^{(p)} + \ldots + Q_1^{(n)} \tag{55}$$

Pri tome je:

$$\begin{aligned}
Q_1^{(1)} &= C_{11}(V_1 - V_r) = C_{11}V_1 \\
Q_1^{(2)} &= C_{12}(V_1 - V_2) \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
Q_1^{(k)} &= C_{1k}(V_1 - V_k) \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
Q_1^{(p)} &= C_{1p}(V_1 - V_p) \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
Q_1^{(n)} &= C_{1n}(V_1 - V_n)
\end{aligned} \tag{56}$$

Sumiranjem svih ovih količina dobija se naelektrisanje prvog tijela Q_1. Sličnim postupkom dobijamo slične relacije za Q_2, $Q_3, \ldots, Q_n$. Tako dolazimo do sistema:

$$\begin{cases}
Q_1 = C_{11}V_1 + C_{12}(V_1 - V_2) + \ldots + C_{1k}(V_1 - V_k) + \ldots + C_{1p}(V_1 - V_p) + \ldots + C_{1n}(V_1 - V_n) \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
Q_k = C_{k1}(V_k - V_1) + C_{k2}(V_k - V_2) + \ldots + C_{kk}V_k + \ldots + C_{kp}(V_k - V_p) + \ldots + C_{kn}(V_k - V_n) \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
Q_p = C_{p1}(V_p - V_1) + C_{p2}(V_p - V_2) + \ldots + C_{pk}(V_p - V_k) + \ldots + C_{pp}V_p + \ldots + C_{pn}(V_p - V_n) \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
Q_n = C_{n1}(V_n - V_1) + C_{n2}(V_n - V_2) + \ldots + C_{nk}(V_n - V_k) + \ldots + C_{np}(V_n - V_p) + \ldots + C_{nn}V_n
\end{cases} \tag{57}$$

Ovako uvedeni koeficijenti predstavljaju <u>djelimične kapacitete</u> posmatranog sistema, jer karakterišu odnos pojedinih naelektrisanja i odgovarajućih potencijalnih razlika. Pri tome

je C_{kk} - djelimična kapacitivnost k-tog tijela u odnosu na referentno mjesto, dok je C_{kp} - djelimična kapacitivnost k-tog tijela u odnosu na p-to tijelo.
Između koeficijenata „B“ i „C“ postoji i uzajamna veza. Evo kako do nje možemo doći: Neka je ispunjen uslov $V_i = 0$ za $\forall i \neq k$; dakle, samo je $V_k \neq 0$. Uvrštavanjem ovog uslova u k-tu jednačinu sistema (49) dobija se da je

$$Q_k = B_{kk} V_k \tag{58}$$

Isti uslov uvršćen u k-tu jednačinu sistema (57) daje

$$Q_k = (C_{k1} + C_{k2} + \ldots + C_{kk} + \ldots + C_{kp} + \ldots + C_{kn}) V_k \tag{59}$$

Upoređivanjem poslednje dvije jednačine dobija se

$$B_{kk} = C_{k1} + C_{k2} + \ldots + C_{kk} + \ldots + C_{kp} + \ldots + C_{kn} \text{ , tj} \tag{60}$$

$$B_{kk} = \sum_{i=1}^{n} C_{ki} \tag{61}$$

Neka je, sada, zadovoljen uslov: $V_1 = V_2 = \ldots = V_k = \ldots = V_p = \ldots = V_n$. Uvrštavanjem u k-tu jednačinu sistema (49) daje

$$Q_k = (B_{k1} + B_{k2} + \ldots + B_{kk} + \ldots + B_{kp} + \ldots + B_{kn}) V_k \tag{62}$$

Uvrštavanjem istog uslova u k-tu jednačinu sistema (57) daje

$$Q_k = C_{kk} V_k \tag{63}$$

Izjednačavanjem ovih dveju jednačina dobija se jedna od traženih relacija

$$C_{kk} = \sum_{i=1}^{n} B_{ki} \tag{64}$$

Izraz za C_{kp} nalazimo razvijanjem k-te jednačine sistema (57) i njenim upoređenjem sa k-tom jednačinom sistema (49). Naime,

$$Q_k = C_{k1}V_k - C_{k1}V_1 + C_{k2}V_k - C_{k2}V_2 + \ldots + C_{kk}V_k + \ldots + C_{kp}V_k + \ldots - C_{kp}V_p + \ldots + C_{kn}V_k - C_{kn}V_n \tag{65}$$

$$Q_k = -C_{k1}V_1 - C_{k2}V_2 - \ldots - C_{kp}V_p - \ldots - C_{kn}V_n + (C_{k1} + C_{k2} + \ldots + C_{kk} + \ldots + C_{kp} + \ldots + C_{kn}) \cdot V_k \tag{66}$$

Upoređenje sa jednačinom

$$Q_k = B_{k1}V_1 + B_{k2}V_2 + \ldots + B_{kk}V_k + \ldots + B_{kp}V_p + \ldots + B_{kn}V_n \tag{67}$$

Daje i ova relacija

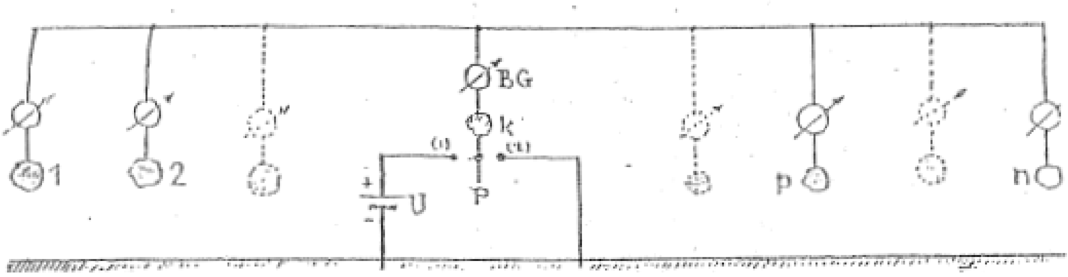
$$C_{k1} = -B_{k1} \tag{68}$$

$$C_{k2} = -B_{k2} \text{ ; itd} \tag{69}$$

U opštem obliku

$$C_{kp} = -B_{kp} \tag{70}$$

Kad smo kod ove relacije primijetimo još i to da su koeficijenti C_{kp} uvijek <u>veći</u> od nule, tj $C_{kp} > 0$, jer su koeficijenti B_{kp} uvijek <u>manji</u> od nule.
Kako izmjeriti koeficijent C_{kk} ?
Opet ćemo se poslužiti šemom za mjerenje. Ovoga puta šema će imati drugačiji oblik.

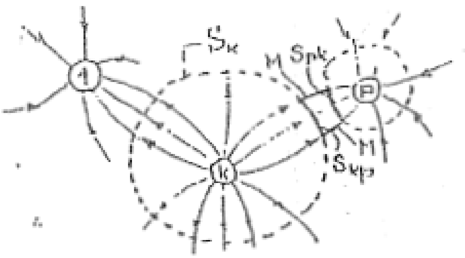


Najprije se podjsetimo pretpostavke pod kojom smo izveli gornje relacije. C_{kk} je izvedeno pod uslovom da je $V_1 = V_2 = \ldots = V_n$, pa i šema mora zadovoljiti ovaj uslov. (To je i razlog što su tijela povezana sva među sobom)
Prebacimo preklopnik P u položaj (1). Time smo automatski odredili potencijal svih tijela u sistemu! Prebacivanjem prekidača u položaj (2) određujemo i naelektrisanje svakog tijela! Sa ova dva podatka lako se izračunava kapacitet ma kojeg tijela u sistemu:

$$C_{kk} = \frac{Q_k}{V_k} \tag{71}$$

I na kraju, osvrnimo se još jedanput na međusobnu kapacitivnost. Naime, C_{kp} predstavlja kapacitivnost k-tog tijela prema p-tom tijelu, dok C_{pk} predstavlja, obrnuto, kapacitivnost p-tog tijela prema k-tom tijelu. Između dvih dviju kapacitivnosti postoji tačno određen odnos i to

$$C_{kp} = C_{pk} \tag{72}$$



Da bismo ovo dokazali ponovo posmatrajmo dati sistem od n tijela. (vidi sliku). Za proizvoljnu zatvorenu površ S_k, oko tijela k, možemo pisati Gausov zakon (u proširenom obliku)

$$\oint_{S_k} \vec{D} d\vec{S} = Q_k \tag{73}$$

Lijeva strana se može razbiti ovako:

$$Q_k = \int_{S_{k1}} \vec{D} d\vec{S} + \ldots + \int_{S_{kk}} \vec{D} d\vec{S} + \ldots + \oint_{S_{kn}} \vec{D} d\vec{S} \tag{74}$$

Svaki od sabiraka predstavlja djelimičnu količinu elektriciteta koja pripada određenoj potencijalnoj razlici. Dalje možemo pisati

$$\int_{S_{kp}} \vec{D} d\vec{S} = C_{kp}(V_k - V_p) \tag{75}$$

i

$$\int_{S_{pk}} \vec{D}d\vec{S} = C_{pk}(V_p - V_k) \quad (76)$$

Uočimo na slici zatvorenu površinu S koju čine „baze“ S_{pk} i S_{kp} i „omotač“ M. Kako je unutar ove zatvorene površine $Q = 0$ to je

$$\oint_S \vec{D}d\vec{S} = 0 \quad (77)$$

$$\int_{S_{kp}} \vec{D}d\vec{S} + \int_{S_{pk}} \vec{D}d\vec{S} + \int_M \vec{D}d\vec{S} = 0 \quad (78)$$

Kako je treći sabirak jednak nuli (jer je ugao između $\vec{D}$ i $d\vec{S}$ jednak $\pi/2$) kao i s obzirom na vrijednosti ostala dva sabirka, možemo pisati:

$$C_{kp}(V_k - V_p) + C_{pk}(V_p - V_k) = 0 \quad (79)$$

$$C_{kp}(V_k - V_p) = -C_{pk}(V_p - V_k) \text{ , a odavde} \quad (80)$$

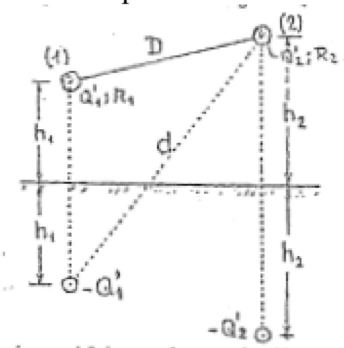
$$C_{kp} = C_{pk} \quad (81)$$

Dakle, djelimične kapacitivnosti dva tijela su jednake! Kako je $C_{kp} = -B_{kp}$ a $C_{pk} = -B_{pk}$ slijedi da su i međusobni koeficijenti indukcije takođe među sobom jednaki, tj

$$B_{kp} = B_{pk} \quad (82)$$

1.4 Kapacitet dvožičnog voda nad zemljom

Neka su data dva duga tanka provodnika koja se na konačnoj visini iznad zemlje protežu tako da su paralelna i među sobom i u odnosu na površinu zemlje. (vidi sliku).



Pretpostavimo sledeće:

$$(R_1, R_2) \ll D \text{ , i} \quad (83)$$

$$(R_1, R_2) \ll (h_1, h_2) \quad (84)$$

Zašto su bitne ove pretpostavke?

Ako bi dimenzije provodnika bile uporedive sa njihovim međusobnim rastojanjem (kao i sa njihovim odstojanjem od zemljine površine) onda naelektrisanje na provodnicima ne bi bilo ravnomjerno raspoređeno (zbog takozvanog efekta blizine ili pojave influencije, tj indukcije), pa u tom slučaju ne bi bilo korektno služiti se formulom za polje i potencijal

$$E = \frac{Q'}{2\pi\varepsilon_0 r} \;,\; V = \frac{Q'}{2\pi\varepsilon_0}\ln\frac{r_R}{r} \tag{85}$$

U kome dužina r_R označava odstojanje niti od referentne tačke (mjesta), dok dužina r predstavlja odstojanje tačke, u kojoj tražimo potencijal, od naelektrisanja koje taj potencijal stvara!
U našem slučaju, najzgodnije je uzeti površinu zemlje za referentno mjesto. S druge strane, samo malo pažljivije posmatranje slike nedvosmisleno navodi na primjenu metode ogledanja! Dakle, uvodimo likove ($-Q_1'$) i ($-Q_2'$). A sada rezonujmo ovako: (vidi definisanje koeficijenata A_{kk}) zamislimo da je $Q_2' = 0$ za trenutak, a da postoji samo Q_1'. Tada će potencijal na površini tijela (1) poticati kako od samog naelektrisanja Q_1' tako i od njegovog lika ($-Q_1'$) koji, u stvari, predstavlja zamjenu (ekvivalentnu) za induktivno naelektrisanje koje stvara Q_1' na površini zemlje, a koje takođe utiče na vrijednost potencijala prvog tijela. Dakle,

$$V_1 = V_1(Q_1') + V_1(-Q_1') \tag{86}$$

$$V_1 = \frac{Q_1'}{2\pi\varepsilon_0}\ln\frac{h_1}{R_1} - \frac{Q_1'}{2\pi\varepsilon_0}\ln\frac{h_1}{2h_1 - R_1} \;,\; R_1 \ll 2h_1 \tag{87}$$

Pa dobijamo konačno

$$V_1 = \frac{Q_1'}{2\pi\varepsilon_0}\ln\frac{2h_1}{R_1} \tag{88}$$

Po definiciji je

$$A_{11} = \frac{V_1}{Q_1} \text{, a u našem slučaju} \tag{89}$$

$$A_{11}' = \frac{V_1}{Q_1'} = \frac{1}{2\pi\varepsilon_0}\ln\frac{2h_1}{R_1} \tag{90}$$

(ovo je koeficijent po jedinici dužine.)
Pretpostavimo li sada da postoji samo $Q_2' \neq 0$, a da je $Q_1' = 0$, po istoj logici dobijamo da je

$$A_{22}' = \frac{1}{2\pi\varepsilon_0}\ln\frac{2h_2}{R_2} \tag{91}$$

Još nam trebaju koeficijenti A_{12} i A_{21}, pri čemu je, kao što je poznato, $A_{12} = A_{21}$. Pa, u tom cilju, neka je $Q_1' \neq 0$, a $Q_2' = 0$. Tada je

$$V_2 = V_2(Q_1') + V_2(-Q_1') = \frac{Q_1'}{2\pi\varepsilon_0}\ln\frac{h_1}{D} - \frac{Q_1'}{2\pi\varepsilon_0}\ln\frac{h_1}{d} \tag{92}$$

$$V_2 = \frac{Q_1'}{2\pi\varepsilon_0}\ln\frac{h_1}{D} \text{, a odavde po definiciji} \tag{93}$$

$$A_{21}' = \frac{V_2}{Q_1'} = \frac{1}{2\pi\varepsilon_0}\ln\frac{d}{D} = A_{12}' \tag{94}$$

Kada smo našli koeficijente „ A “ tražimo koeficijente „ B “, znajući da je, za dati sistem tijela, determinanta sistema u obliku

$$\text{Det}=\begin{vmatrix} A_{11}' & A_{12}' \\ A_{12}' & A_{22}' \end{vmatrix} = A_{11}'A_{22}' - A_{12}^2{}' \text{ , te je} \quad (95)$$

$$B_{11}' = (-1)^{1+1}\frac{A_{22}'}{\text{Det}} = \frac{A_{22}'}{\text{Det}} \quad (96)$$

$$B_{22}' = (-1)^{2+2}\frac{A_{11}'}{\text{Det}} = \frac{A_{11}'}{\text{Det}} \quad (97)$$

$$B_{12}' = -\frac{A_{21}'}{\text{Det}} \quad (98)$$

$$B_{21}' = -\frac{A_{12}'}{\text{Det}} \quad (99)$$

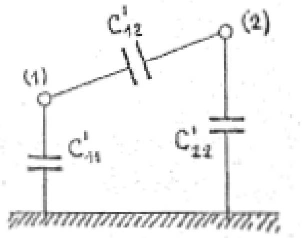
Sa poznatim koeficijentima „ B “ nije teško naći i tražene koeficijente „ C “.
Naime, za naš slučaj

$$C_{11}' = \sum_{i=1}^{2} B_{1i}' = B_{11}' + B_{12}' \quad (100)$$

$$C_{22}' = \sum_{i=1}^{2} B_{2i}' = B_{21}' + B_{22}' \text{ , i} \quad (101)$$

$$C_{12}' = C_{21}' = -B_{12}' \quad (102)$$

Šta, u stvari, predstavljaju ovi koeficijenti „ C “? Najsažetiji odgovor daje donja slika.



Naime, C_{11} je kapacitet između prvog provodnika i zemlje; C_{22} - kapacitet drugog provodnika i zemlje; $C_{12} = C_{21}$ - kapacitet između samih provodnika. Pri tome je C_{12} vezan paralelno sa rednom vezom C_{11} i C_{22}, te je <u>ukupna</u> ili <u>pogonska</u> kapacitivnost data sa

$$C_u' = C_{12}' + \frac{C_{11}'C_{22}'}{C_{11}' + C_{22}'} \quad (103)$$

Dvožični vod, faktički, predstavlja jedan kondenzator i ako je priključen na neki napon tada je:

$$Q_1' = Q' \text{ , a} \quad (104)$$

$$Q_2' = -Q' \quad (105)$$

Bez obzira na prisustvo zemlje. A po definiciji je

$$V_1 = A_{11}'Q_1' + A_{12}'Q_2' = (A_{11}' - A_{12}')Q' \quad (106)$$

$$V_2 = A_{12}'Q_1' + A_{22}'Q_2' = (A_{12}' - A_{22}')Q' \tag{107}$$

$$U = V_1 - V_2 = (A_{11}' + A_{22}' - 2A_{12}')Q' \tag{108}$$

Po definiciji kapacitivnosti, za svaki kondenzator važi (pa i za dvožični vod)

$$C_u' = \frac{Q'}{U} = \frac{1}{A_{11}' + A_{22}' - 2A_{12}'} \tag{109}$$

(ovaj izraz bismo dobili i da smo pošli od gornjeg izraza za C_u' uvrštavajući vrijednosti za C_{11}', C_{22}' i C_{12}' izražene preko „B“ odnosno „A“ koeficijenata, samo bi put bio mnogo duži!)
Ako u poslednji izraz za C_u' uvrstimo vrijednost za „A“ koeficijente dobijamo

$$C_u' = \frac{2\pi\varepsilon_0}{\ln\frac{2h_1}{R_1} + \ln\frac{2h_2}{R_2} - 2\ln\frac{d}{D}} = \frac{2\pi\varepsilon_0}{\ln\frac{4h_1h_2D^2}{R_1R_2d^2}} \tag{110}$$

U specijalnom slučaju simetričnog dvožilnog voda biće:

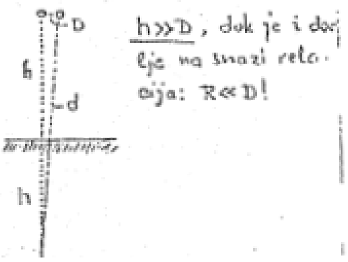
$$R_1 = R_2 = R \tag{111}$$

$$h_1 = h_2 = h \tag{112}$$

$$d = \sqrt{D^2 + 4h^2} \tag{113}$$

Te je podužni kapacitet dvožičnog voda:

$$C_u' = \frac{2\pi\varepsilon_0}{\ln\frac{2^2h^2}{R^2}\cdot\frac{D^2}{d^2}} = \frac{\pi\varepsilon_0}{\ln\frac{2hD}{Rd}} \tag{114}$$



Posebno interesantan slučaj je kada imamo vod visoko iznad zemlje, tj kada je $h \gg D$, te je $d = \sqrt{D^2 + (2h)^2} \approx 2h$, pa je konačno podužna kapacitivnost dvožičnog voda, (kada se prisustvo zemlje može zanemariti) data relacijom

$$C_u' = \frac{\pi\varepsilon_0}{\ln\frac{D}{R}} \tag{115}$$